Dynamique de rotation | Cinématique de rotation | Système mécanique

On néglige les frottements et la résistance de l'air.

Une tige T de longueur $L = 50\ cm$, de masse $M_1 = 96\ g$, est solidaire d'un tambour cylindrique, d'axe vertical (Δ) fixe, de masse négligeable, et de rayon $R_1 = 5\ cm$. L'axe (Δ) du tambour est perpendiculaire à la tige en son milieu O. Un fil sans masse et inextensible, ne pouvant glisser sur la poulie ni sur le tambour, est enroulé sur le tambour de façon que les spires ne se chevauchent pas. Ce fil passe sur la gorge d'une poulie, d'axe de révolution horizontal et perpendiculaire au plan de la figure. La poulie a une masse $M_2 = 50\ g$ supposée répartie uniformément sur sa circonférence de rayon $R_2 = 10\ cm$.

Pendant le mouvement, on suppose que l'axe de la poulie est fixe, et le brin de fil entre le tambour et la poulie reste horizontal et situé dans le plan de la figure. Un corps de masse $m = 64\ g$ est attaché à l'extrémité du fil.

1. Calculer : a)) le moment d'inertie J_1 de la tige par rapport à l'axe (Δ).

   b)) le moment d'inertie J_2 de la poulie par rapport à son axe de révolution.

2. A l'instant t=0s, on abandonne la masse m sans vitesse initiale.

   a)) Vérifier que l'accélération de la masse m est $a = 0{,}7 m.s^{-2}$.

   b)) En déduire l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_1$ de la tige.

chaambane92@gmail.com

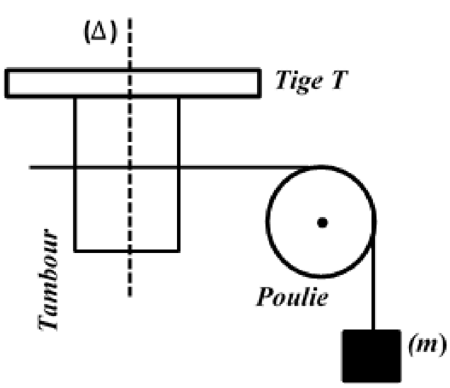
Dynamique de rotation | Cinématique de rotation | Système mécanique

3. A l'instant t, la vitesse de la masse m est $v = 2m.s^{-1}$. Calculer :

   a)) La distance parcourue par la masse m à cet instant et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ de la tige.

   b)) le nombre de tours n effectués par la tige à cet instant. En déduire alors l'instant t.

4. A l'instant t, le fil reliant le tambour et la masse m casse. On applique une force tangentielle $\vec{F}$ à la poulie d'intensité F pour l'arrêter. a)) En utilisant la RFD, montrer que le mouvement de la poulie est uniformément retardé, en déduire alors la décélération angulaire de ce mouvement et le nombre de tours effectués par la poulie avant de s'arrêter, sachant que $F = 21N$. b)) Calculer la durée de ce mouvement de freinage ainsi que l'angle balayer par la poulie.

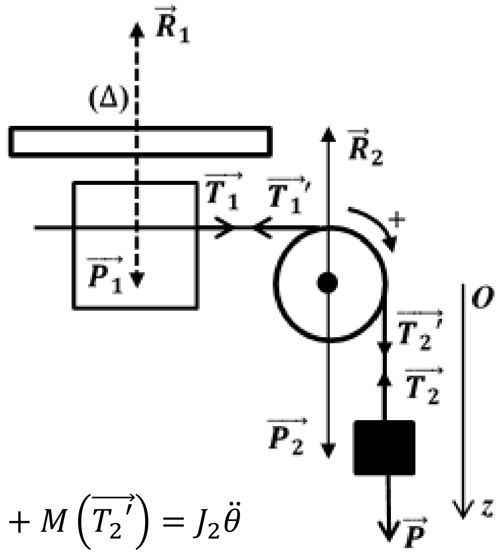


chaambane92@gmail.com

1. Calculer : a)) le moment d'inertie J_1 de la tige par rapport à l'axe (Δ).
   b)) le moment d'inertie J_2 de la poulie par rapport à son axe de révolution.

a)) Moment d'inertie de la tige par rapport à (Δ).

$$J_1 = \frac{1}{12}M_1L^2 = \frac{1}{12} \times 0{,}096 \times 0{,}5^2 = 2.10^{-3} kg.m^2$$



b)) Moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe

$$J_2 = M_2{R_2}^2 = 0{,}050 \times 0{,}1^2 = 5.10^{-4} kg.m^2$$

2. a)) Démontrons que $\boldsymbol{a = 0{,}7 ms^{-2}}$

- Pour le corps de m. *T.C.I :* $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T}_2 = m\vec{a}$

  Suivant Oz: $mg - T_2 = ma \Rightarrow T_2 = mg - ma \;(1)$

- Pour la poulie de masse M_2

  R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta} \Longrightarrow M(\overrightarrow{P_2}) + M(\overrightarrow{R_2}) + M(\overrightarrow{T_1'}) + M(\overrightarrow{T_2'}) = J_2\ddot{\theta}$

$$Or\ M(\overrightarrow{P_2}) + M(\overrightarrow{R_2}) = 0 \Longrightarrow T_2'R_2 - T_1'R_2 = J_2\ddot{\theta}$$

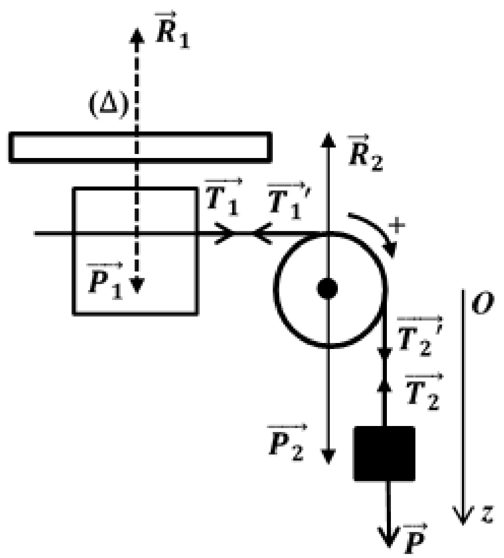
$$Or\ T_2 = T_2' \quad et\ \ddot{\theta} = \frac{a}{R_2} \Rightarrow \ (mg - ma)R_2 - T_1'R_2 = J_2\frac{a}{R_2} \Longrightarrow T'_1 = -a\left(J_2\frac{1}{{R_2}^2} + m\right) + mg \;(2)$$

chaambane92@gmail.com

1. Calculer : a)) le moment d'inertie J_1 de la tige par rapport à l'axe (Δ).
   b)) le moment d'inertie J_2 de la poulie par rapport à son axe de révolution.

- Pour le tambour

R.F.D (en rotation) : $\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta}$



$$\Longrightarrow M(\overrightarrow{P_1}) + M(\overrightarrow{R_1}) + M(\overrightarrow{T_1}) = J_1\ddot{\theta} \quad Or\ M(\overrightarrow{P_1}) + M(\vec{R}_1) = 0$$

$$\Longrightarrow T_1R_1 = J_1\ddot{\theta} = J_1\frac{a}{R_1} \Longrightarrow T_1 = J_1\frac{a}{{R^2}_1} \quad (3)$$

$$Or \quad T_1 = T_1' \quad \Rightarrow -a\left(\frac{J_2}{{R_2}^2} + m\right) + mg = \frac{aJ_1}{{R^2}_1} \Longrightarrow a = \frac{mg}{\frac{J_1}{{R^2}_1} + \frac{J_2}{{R_2}^2} + m}$$

$$A.N: \ a = \frac{0{,}064 \times 10}{\frac{2.10^{-3}}{0{,}05^2} + \frac{5.10^{-4}}{0{,}1^2} + 0{,}064} = 0{,}7 m.s^{-2}$$

b)) Accélération de la tige

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{a}{R_1} = \frac{0{,}7}{0{,}05} = 14 rad.s^{-2}$$

chaambane92@gmail.com

3. A l'instant t, la vitesse de la masse m est $v = 2m.s^{-1}$. Calculer :
a)) La distance parcourue par la masse m à cet instant et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ de la tige.
b)) le nombre de tours n effectués par la tige à cet instant. En déduire alors l'instant t.

***3.* a)) Distance parcourue par la masse**

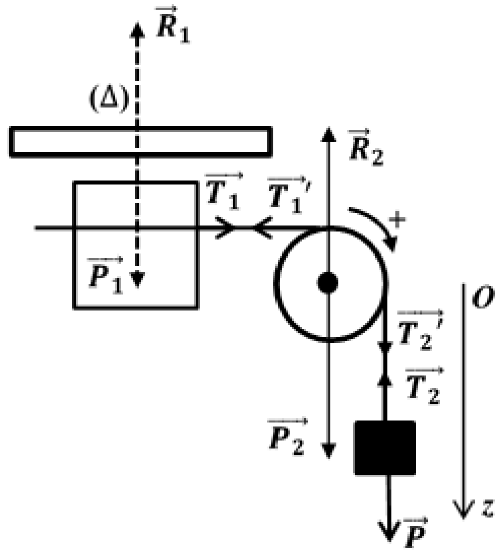
$$R.I.T:\ \Delta v^2 = v^2 = 2ad \Rightarrow d = \frac{v^2}{2a} = \frac{4}{2\times 0{,}7} = 2{,}86 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{2}{0{,}05} = 40rad.s^{-1}$$

b)) Détermination du nombre de tours n

$$R.I.T\ \ \Delta\omega^2 = \dot{\theta}_1^{\,2} = 2\ddot{\theta}_1\Delta\theta = 2\ddot{\theta}_1\theta = 2\ddot{\theta}_1.2\pi n$$

$$\Rightarrow n = \frac{\dot{\theta}_1^{\,2}}{4\pi\ddot{\theta}_1} \Longrightarrow n = \frac{40^2}{4\pi\times 14} = 9{,}094tours$$

- Détermination de l'instant t *:* $\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 t \Rightarrow t = \frac{\dot{\theta}_1}{\ddot{\theta}_1} = \frac{40}{14} = 2{,}8s$

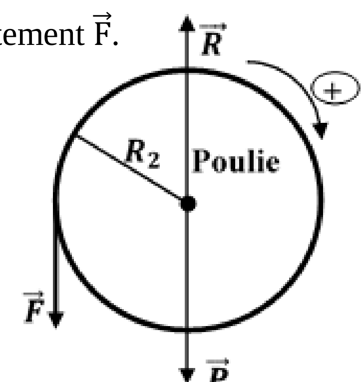


chaambane92@gmail.com

4. A l'instant t, le fil reliant le tambour et la masse m casse. On applique une force tangentielle $\vec{F}$ à la poulie d'intensité F pour l'arrêter.

***4.* a)) Montrons que le mouvement est C.U.D**

Après la rupture, la poulie est soumise à son poids $\overrightarrow{P_2}$, à la réaction $\overrightarrow{R_2}$ et à la force de frottement $\vec{F}$.



R.F.D (en rotation) :$\sum M(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_2\ddot{\theta} \Longrightarrow M(\vec{P}_2) + M(\vec{R}_2) + M(\vec{F}) = J_2\ddot{\theta}$

$$Or\ \ M(\overrightarrow{P_2}) + M(\overrightarrow{R_2}) = 0 \Longrightarrow M(\vec{F}) = J_2\ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{M(\vec{F})}{J_2} \quad or\ M(\vec{F}) < 0 \Rightarrow \ddot{\theta} < 0$$

d'où le mouvement de la poulie est C. U. D

- Valeur de la décélération angulaire

$$M(\vec{F}) = -FR_2 = -21\times 0{,}05 = -1{,}05N.m \ \ et\ \ \ddot{\theta} = \frac{M(\vec{F})}{J_2} = -\frac{1{,}05}{5.10^{-4}} = -210rad.s^{-2}$$

- Nombre de tours n effectués

$$R.I.T:\ \Delta\omega^2 = -\omega_1^{\,2} = 2\ddot{\theta}\Delta\theta = 2\ddot{\theta}\theta = 2\ddot{\theta}.2\pi n \Rightarrow n = -\frac{\omega_1^{\,2}}{4\pi\ddot{\theta}} = -\frac{40^2}{4\pi(-210)} = 0{,}6tours$$

b)) Durée de freinage *:*

$$\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-\dot{\theta}_1}{\ddot{\theta}} = \frac{-40}{-210} = 0{,}19s$$

- Angle balayé par la poule *:* $\Delta\theta = 2\pi n = 2\pi\times 0{,}6 = 3{,}77rad$

chaambane92@gmail.com