Calcul d'integral
$1^{\text{ère}}$-ELT-CPI-MI,2024-2025

1. Calcul des primitives

1. 1. Primitives

Définition 1.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F, définie sur I, dérivable sur I, telle que :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Exemple 1. ① $f(x) = 3x^2$,
$F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
$F(x) = x^3 + 2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

② $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$,
$F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.
Toute fonction continue sur un intervalle I, possède au moins une primitive sur I.

Remarque 1.
Si F et G deux primitive de f sur I alors il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$

Notation 1.
Si f une fonction continue sur un intervalle I, on note $\int f(x)dx$ l'ensemble des primitives de f sur I.

Exemple 2. ① $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

② $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

1. 2. Primitives usuelles :

Fonction f	Primitive F	Domaine de définition $\mathcal{D}_f$
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln|x|$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$[-1, 1]$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argsh(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$argch(x)$	$]1, +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$argth(x)$	$]-1, 1[$

1. 3. Opérations sur les primitives :

Soit F et G deux primitives de f et g respectivement.
Le tableau suivant résume quelque opérations sur les primitives :

Forme	Primitive	Condition
$f+g$	$F+G$	$\forall f, g$
λf	λF	$\lambda \in \mathbb{R}$
$f'f^n$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{f'}{f^n}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$	$n > 1$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	$f(x) > 0$
$f'\cos(f)$	$\sin(f)$	$\forall f$
$f'\sin(f)$	$-\cos(f)$	$\forall f$
$f'e^f$	e^f	$\forall f$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$	$f \neq 0$

Exemple 3. ① $f(x) = 4x^2, \quad I = \mathbb{R}.$

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int 4x^2 dx \\ &= 4\int x^2 dx \\ &= 4(\frac{1}{3}x^3) + c \\ &= \frac{4}{3}x^3 + c \end{aligned}$$

② $f(x) = 2x(x^2-1)^5, \quad I = \mathbb{R}.$

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int 2x(x^2-1)^5 dx \\ &= \int (x^2-1)'(x^2-1)^5 dx \\ &= \frac{1}{6}(x^2-1)^6 + c \end{aligned}$$

③ $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x-6}}, \quad I =]2, +\infty[.$

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int \frac{3}{\sqrt{3x-6}}dx \\ &= \int \frac{(3x-6)'}{\sqrt{3x-6}}dx \\ &= 2\sqrt{3x-6} + c \end{aligned}$$

④ $f(x) = 2x - 2\cos(2x) - 6\sin(3x-1), \quad I = \mathbb{R}.$

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int (2x - 2\cos(2x) - 6\sin(3x-1))dx \\ &= \int (2x - (2x)'\cos(2x) - 2\times(3x-1)'\sin(3x-1))dx \\ &= x^2 - \sin(2x) + 2\cos(3x-1) + c \end{aligned}$$

2. Calcul d'integral

2. 1. Calcul par primitive

> **Définition 2.**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$. Alors l'integrale entre a et b de la fonction f est le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ qui vaut $F(b) - F(a)$; avec F une primitive quelconque de f sur I.

Notation 2.

- ⋆ on note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- ⋆ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(s)ds = ...$, c'est juste une écriture.

Exemple 4.

①

$$\begin{aligned}\int_0^1 4x^2 dx &= \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x(x^2-1)^5 dx &= \int_0^1 (x^2-1)'(x^2-1)^5 dx \\ &= \left[\frac{1}{6}(x^2-1)^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{3}{\sqrt{3x-6}} dx &= \int_2^3 \frac{(3x-6)'}{\sqrt{3x-6}} dx \\ &= \left[2\sqrt{3x-6}\right]_2^3 = 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

2. 2. Propriétés de l'intégrale :

Relation de chasles :

Proposition 2.
Soit f une fonction continue sur I.
Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{(Relation de chasles).}$$

En particulier $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Linéarité :

Proposition 3.
On suppose que f et g sont continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.
alors :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx.$$

Positivité :

Proposition 4.
Soient f une fonction continue sur I,$a, b \in I$ tels que $a < b$.
alors :

① Si $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

② Si $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.

3. Techniques de calcul d'integral :

3. 1. Intégration par parties :

Proposition 5.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et dont les dérivées sont continues sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 5.

① $I = \int_0^1 xe^x dx$.
On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= e - 0 - e + 1 = 1 \end{aligned}$$

② $I = \int_1^2 \ln(x)dx$.
On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \ln(x)dx &= \int_1^2 u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)dx \\ &= [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 1dx \\ &= [x\ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - 0 - 2 + 1 = 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

3. 2. Changement de variable :

Proposition 6.
On considère une fonction φ dérivable sur un intérvalle I, et soient $a, b \in I$, et J un intervalle contenant $\varphi(I)$.
Soit f une fonction définie et continue sur J, et soient F une primitive de f sur J.
Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Exemple 6.

① $I = \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$, $t = \sqrt{x}$.
$t = \sqrt{x} \implies x = t^2$.

$t=\sqrt{x} \implies dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
Donc $dx=2\sqrt{x}dt=2tdt$. Et on a :

$$\begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \implies \begin{cases} t=\sqrt{1}=1 \\ t=\sqrt{4}=2 \end{cases}$$

donc par changement de variable :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx \\ &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t}dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t+1}dt \\ &= 2\left[\ln(t+1)\right]_1^2 \\ &= 2\ln(3)-2\ln(2)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

② $I=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx$, $u=x^2$.
$u=x^2 \implies x=\sqrt{u}$.
$u=x^2 \implies du=2xdx$.
Donc $dx=\frac{du}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}du$. Et on a :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} u=\frac{1}{9} \\ t=\frac{1}{4} \end{cases}$$

donc par changement de variable :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}}du \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-u}du \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1-u)^{1+\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(1-u)^{\frac{2}{3}}\right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{81}-\frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Remarque 2.
Pour faire un changement de variable,
- ⋆ N'oublier pas de changer les bornes.
- ⋆ Modifier dx suivant la règle : si $u=\varphi(x)$, alors $du=\varphi'(x)dx$.

Application 1.
Soit $a>0$:
① Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.
② Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

3. 3. CALCUL DES INTÉGRALES DES FRACTIONS RATIONNELLES

Pour les éléments simple de première espèce : $\int \frac{\alpha}{(x-a)^k}dx$

⋆ Pour $k = 1$:

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^k} dx = \alpha \ln|x-a| + c.$$

⋆ Pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha}{(x-a)^k} dx &= \alpha \int \frac{1}{(x-a)^k} dx \\ &= \alpha \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + c \\ &= \frac{\alpha}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c\end{aligned}$$

Pour les éléments simple de deuxième espèce : $\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} dx$ On écrit

$$\begin{aligned}\beta x + \gamma &= \frac{\beta}{2}\left(2x + \frac{2\gamma}{\beta}\right) \\ &= \frac{\beta}{2}(2x+b) + K. \quad \text{avec } K = \gamma - \frac{b\beta}{2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} = \frac{\beta}{2}\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + \frac{K}{x^2+bx+c}.$$

D'où

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} dx = \underbrace{\frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx}_{A} + \underbrace{\int \frac{K}{x^2+bx+c} dx}_{B}.$$

Pour la partie (A), on a :

$$\frac{\beta}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \frac{\beta}{2}\ln|x^2+bx+c| + C.$$

pour le calcule de l'intégrale B :

On écrit $x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)^2}_{p^2}$.

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{K}{x^2+bx+c} dx &= \int \frac{K}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + p^2} dx \\ &= \frac{1}{p^2}\int \frac{K}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{K}{p^2}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2 + 1} dx\end{aligned}$$

faisant le changement du variable $u = \frac{2x+b}{2p}$, alors $dx = pdu$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{K}{p^2}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+b}{2p}\right)^2 + 1} dx &= \frac{K}{p^2}\int \frac{p}{u^2+1} du \\ &= \frac{K}{p}\int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \frac{K}{p}\arctan(u) + C\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{x^2+bx+c} dx = \frac{\beta}{2}\ln|x^2+bx+c| + \frac{K}{p}\arctan\left(\frac{2x+b}{2p}\right) + C$$

avec $K = \gamma - \frac{b\beta}{2}$ et $p = c - \frac{b^2}{4}$.

Exemple 7. ① $I = \int_3^4 \frac{3x+1}{x^2+x+1}dx$.

On a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{3x+1}{x^2+x+1} &= \int_3^4 \frac{\frac{3}{2}\left(2x+\frac{2}{3}\right)}{x^2+x+1}dx \\ &= \underbrace{\frac{3}{2}\int_3^4 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx}_{I_2}\end{aligned}$$

Pour I_1 on a

$$I_1 = \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+x+1|\right]_3^4 = \frac{3}{2}\left(\ln(21)-\ln(13)\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{21}{13}\right).$$

Calculons I_2 : On a

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx \\ &= \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\ &= \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)}dx \\ &= \frac{4}{6}\int_3^4 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx\end{aligned}$$

faisant le changemet de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. On a

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \implies dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$$

et

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} u = \frac{7}{\sqrt{3}} \\ u = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{2}{3}\int_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{3\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{u^2+1}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{3\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan(u)\right]_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left((3\sqrt{3}\right)) - \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\right)\end{aligned}$$

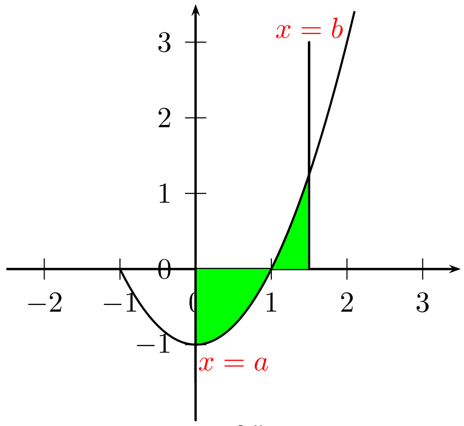
d'où

$$\int_3^4 \frac{3x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{21}{13}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left((3\sqrt{3}\right)) - \arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

4. Applications

4. 1. Calcul d'aire :

Proposition 7. Soit f une fonction continue $[a,b]$.
La quantité $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|dx$ est l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'aire $\mathcal{A} = \int_0^{0.5} (x^2-1)dx$

Exemple 8.

① L'aire compris entre lacourbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$ et l'axe des abcisses.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{4} \\ &= \ln(4) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\ln(2) + \ln(2) = 3\ln(2)\end{aligned}$$

② L'aire compris entre lacourbe de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$ et l'axe des abcisses.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^3 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^3 \\ &= \frac{51}{4}\end{aligned}$$

4.1.1 VALEUR MOYENNE

Définition 3.
On appelle valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Si une fonction f est périodique de période T la valeur moyenne s'exprime par :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

Dans le cas où f est positive, la valeur moyenne m de f sur $[a, b]$ est telle que l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les deux droites $x = a$ et $x = b$ coïncide avec l'aire du rectangle de côtés m et $b - a$.

Exemple 9.

① La valeur moyenne de $f(x) = x^3$ sur $[-1, 3]$ est donnée par :

$$m = \frac{1}{3-(-1)} \int_{-1}^{3} x^3 \, dx.$$

Calculons cette intégrale :

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^{3} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Donc, la valeur moyenne est :

$$m = \frac{1}{4} \times 20 = 5.$$

4.12 VALEUR MOYENNE

Définition 4.
On appelle valeur efficace d'une fonction $f(x)$ définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité :

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}.$$

Si une fonction f est périodique de période T la valeur efficace s'exprime par :

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}.$$

La valeur efficace est une quantité très utilisée en électricité. La tension qui est fournie par EDF est une tension non constante, alternative. Sa valeur suit la courbe de la fonction sinus. Pourtant, on nous dit que nous avons une tension de 220V (en fait, 230V maintenant). Cette valeur est la valeur efficace (sur une période) de la tension qui nous est fournie.

Précisément, la valeur efficace d'une tension U est la valeur d'une tension continue qui produirait le même échauffement que U sur une résistance. Cette notion est celle qui est utilisée dans les calculs de puissance.

Exemple 10.

① La valeur efficace de $f(x) = x^3$ sur $[-1, 3]$ est donnée par :

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3} x^6\,dx}.$$

Calculons cette intégrale :

$$\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7}$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^{3} x^6\,dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{3} = \frac{3^7}{7} - \frac{(-1)^7}{7} = \frac{2187}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{2188}{7}.$$

Donc,

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{2188}{7}} = \sqrt{\frac{2188}{28}} = \sqrt{\frac{547}{7}}.$$