Équations différentielles
1ère-ELT-CPI-MI,2024-2025

1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

1. 1. Description

Définition 1.
Ce sont des équations différentielles qu'on peut écrire sous la forme

$$(E): \quad a(t)y(t)' + b(t)y(t) = c(t).$$

où a, b, c sont des fonctions continues.
$c(t)$ est appelé le second membre.

Remarque 1.

① Si a, b, et c sont des constantes, on dit que l'équation linéaire est à coefficients constants.

② Lorsque $c(t)$ n'est pas constamment nul, l'équation différentielle $a(t)y'(t)+b(t)y(t) = c(t)$ est dite "complète".

③ Lorsque $c(t) = 0$, on dit que l'équation différentielle linéaire $a(t)y'(t)+b(t)y(t) = 0$ est "sans second membre" (ou encore " homogène ").

④ À toute équation différentielle linéaire (E) : $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ correspond une équation différentielle linéaire sans second membre $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$; c'est l'équation sans second membre "associée" à l'équation (E).

Exemple 1. L'équation différentielle du premier ordre (E) $2ty'(t) - y(t) = \sqrt{t}$ (à résoudre sur $]0, +\infty[$) est linéaire. En effet, elle est de la forme $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ avec $a(t) = 2t$, $b(t) = -1$ et $c(t) = \sqrt{t}$. Son équation homogène associée est (H) $2ty'(t) - y(t) = 0$.

1. 2. Principe général de résolution d'une équation différentielle linéaire

Pour résoudre une équation différentielle linéaire (en fait quel que soit son ordre), la méthode générale consiste à commencer par résoudre l'équation sans second membre associée. En effet, on a le résultat :

Théorème 1.
La solution générale d'une équation différentielle linéaire est obtenue en ajoutant une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation sans second membre associée.

1. 3. Forme des solutions de l'équation sans second membre

Remarquons d'abord qu'une équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre admet toujours la fonction nulle comme solution particulière.
En fait on a le résultat suivant :

Proposition 2.
Si f est une solution non nulle, dans un intervalle I où $a(t)$ ne s'annule pas, de l'équation (H) $a(t)y'(t)+b(t)y(t) = 0$, alors la solution générale de (H) sur I est $y = \lambda f$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. 4. Résolution de l'équation sans second membre

Première méthode de résolution :
Une équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre est aussi une équation différentielle à variables séparables ; il suffit d'écrire (pour $y \neq 0$, on sait que la fonction nulle est solution, on cherche donc les autres fonctions solutions).

$$(H): \qquad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \iff \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{b(t)}{a(t)}$$

Donc dans tout intervalle I dans lequel la fonction a ne s'annule pas on est sûr que les solutions de (H) sont, outre la fonction nulle, les fonctions $y(t) = f(t)$ telles que $\ln|y(t)| = \int -\frac{b(t)}{a(t)}dt$ Si G est une primitive de la fonction

$x \mapsto -\frac{b(t)}{a(t)}$, les solutions de (H) sont donc les fonctions qui vérifient $\ln|y(t)| = G(t) + c$ ou encore $|y(t)| = e^{G(t)+c}$, soit $y(t) = \pm e^{G(t)}e^c$ en notant $\lambda = \pm e^c$ qui est un réel non nul et quelconque, on peut conclure que les solutions non nulles de (H) sont les fonctions de la forme $y(t) = f(t) = \lambda e^{G(t)}$.

Deuxième méthode de résolution :

On met l'équation (H) sous la forme $y'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}y(t) = u(t)y(t)$, où on a posé $u(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}$.

u est une fonction continue, qui admet des primitives sur I. Soit U une primitive de u sur I. Il est facile de vérifier que la fonction f définie par $f(t) = e^{U(t)}$ est une solution de (H).

Donc la solution générale de (H) est :

$$y(t) = \lambda e^{U(t)} \text{ avec } U(t) = \int -\frac{b(t)}{a(t)}dt + c$$

Théorème 3.

La solution générale de l'équation différentielle du premier ordre linéaire sans second membre (H) : $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ est $y(t) = \lambda e^{U(t)}$ avec $U(t) = \int -\frac{b(t)}{a(t)}dt + c$,

c'est-à-dire que U est une primitive de la fonction $t \mapsto -\frac{b(t)}{a(t)}$.

Exemple 2. Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$(H) \qquad \cos(t)y' + \sin(t)y = 0$$

(H) s'écrit $y' = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}y$.

Et ona $\int -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt = \ln(|\cos(t)|) + c = \ln(\cos(t)) + c$ car $cos(t) > 0$ sur I.

La solution générale de (H) est donc $y(t) = \lambda e^{\ln(\cos(t)} = \lambda\cos(t)$.

1. 5. Recherche d'une solution particulière :

Dans un certain nombre de cas, il faut " sentir" l'existence d'une solution particulière et penser à l'exploiter. C'est en particulier souvent le cas lorsque le second membre est une constante, ou une fonction polynôme simple. Dans ce cas, on recherche la solution particulière par identification. Voici deux exemples.

Exemple 3. Résoudre l'équation (E) : $y' + 2y = 3$.

L'équation sans second membre associée, $y' = -2y$ admet comme solution générale $y = \lambda e^{-2t}$, puisque $\int -2dt = -2t + c$. D'autre part, si $y = \frac{3}{2}$, il est clair que $y' = 0$ donc la fonction constante $t \mapsto \frac{3}{2}$ est une solution de (E). Donc la solution générale de l'équation (E) est $y = \lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}$.

Exemple 4. Soit l'équation (E) $\cos(t)y' + \sin(t)y = 1$, à résoudre sur l'intervalle$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a déterminé la solution générale de son équation sans second membre associée (H) $\cos(t)y' + \sin(t)y = 0$. $y(t) = \lambda\cos(t)$. En pensant à $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$, la fonction $y = \sin t$ est une solution particulière de (E). La solution générale de (E) est donc $y(t) = \lambda\cos(t) + \sin(t)$.

Dans tous les cas où on ne devine pas une solution particulière, on a recours à la méthode de variation de la constante.

1.51 Méthode de la variation de la constante :

On considère une équation différentielle linéaire (E) : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et son équation homogène associée (H) : $a(t)y' + b(t)y = 0$, à résoudre sur un intervalle ouvert I.

Supposons qu'on a résolu (H) et déterminé sa solution générale qui est sous la forme $y = \lambda g(t)$, g étant une fonction qui ne s'annule pas sur I, puisque g est de la forme $g(t) = e^{U(t)}$ avec $U(t) = \int -\frac{b(t)}{a(t)}dt + c$. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme $y(t) = \lambda(t)g(t)$, c'est-à-dire à remplacer dans l'expression de la solution générale de (H) la constante λ par une fonction $t \mapsto \lambda(t)$. Remarquons que le fait de chercher les solutions sous cette forme ne nuit en aucune façon à la généralité du problème, car pour toute fonction z, il est possible d'écrire $z = \lambda(t)g(t)$ en posant, pour tout $t \in I$, $\lambda(t) = \frac{z(t)}{g(t)}$ puisque $g(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Une fonction y écrite sous cette forme $y(t) = \lambda(t)g(t)$ est telle que $y' = \lambda'(t)g(t) + \lambda(t)g'(t)$; elle est donc solution de (E) lorsque $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ c'est-à-dire lorsque

$$a(t)(\lambda'(t)g(t) + \lambda(t)g'(t)) + b(t)\lambda(t)g(t) = c(t) \iff a(t)\lambda'(t)g(t) + \lambda(t)(a(t)g'(t) + b(t)g(t)) = c(t)$$

Mais n'oublions pas que g est solution de (H), donc $a(t)g'(t)+b(t)g(t)=0$. Ce qui fait que les solutions de (E) sont les fonctions $y=\lambda(t)g(t)$ avec $\lambda'(t)=\frac{c(t)}{a(t)g(t)}$ (on peut diviser par $a(t)$ et $g(t)$, car ces fonction ne s'annulent pas sur$I$).Si F est une pnmitIve de lafonction $t\mapsto \frac{c(t)}{a(t)g(t)}$ c'est- à-dire si $\int \frac{c(t)}{a(t)g(t)}dt=F(t)+c$, les solutions de (E) sont les fonctions $y=(F(t)+c)g(t)=F(t)g(t)+cg(t)$ qui sont bien sous la forme d'une solution particulière de (E) $(y=F(t)g(t))$ additionnée à la solution générale de (H).

Exemple 5. Résoudre (E) $2ty'-y=\sqrt{t}$ sur $I=]0,+\infty[$.
L'équation sans second membre associée est

$$(H) \qquad 2ty'-y=0 \iff y'=\frac{1}{2t}y$$

Et on a $\int \frac{1}{2t}dt=\frac{1}{2}\ln(|t|)+c=\frac{1}{2}\ln(t)+c=\ln(\sqrt{t})+c$.
Donc la solution générale de (H) est $y=\lambda e^{\ln(\sqrt{t})}=\lambda\sqrt{t}$.
On cherche les solutions de (E) sous la forme $y=\lambda(t)\sqrt{t}=\lambda(t)g(t)$ avec $g(t)=\sqrt{t}$. On écrit donc $y'=\lambda'(t)g(t)+\lambda(t)g'(t)$ et y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} 2t(\lambda'(t)g(t)+\lambda(t)g'(t))-\lambda(t)g(t)=\sqrt{t} &\iff 2x\lambda'(t)\sqrt{t}+\lambda(t)\underbrace{(2tg'(t))-g(t))}_{=0 \textit{ car g solution de } (H)}=\sqrt{t} \\ &\iff \lambda'(t)=\frac{1}{2t} \\ &\iff \lambda(t)=\frac{1}{2}\ln(t)+c. \end{aligned}$$

La solution générale de (E) est donc $y=\left(\frac{1}{2}\ln(t)+c\right)\sqrt{t}=\sqrt{(t)}\ln(\sqrt{t})+c\sqrt{t}$.

1. 6. Conditions initiales :

Théorème 4.
Soit $t_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$ Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) définie sur un intervalle$I$ possède une unique solution vérifiant une condition initiale du type $y(t_0)=y_0$.

Exemple 6. La solution de (E) : $2ty'-y=\sqrt{t}$ qui vérifier $y(1)=1$ est

$$y(t)=(\frac{1}{2}\ln(t)+c)\sqrt{t}=\sqrt{(t)}\ln(\sqrt{t})+\sqrt{t}$$

en effet on a trouver que la solution générale de (E) est

$$y=(\frac{1}{2}\ln(t)+c)\sqrt{t}=\sqrt{(t)}\ln(\sqrt{t})+c\sqrt{t}$$

alors

$$y(1)=1 \iff \sqrt{1}\ln(\sqrt{1})+c\sqrt{1}=1 \iff c=1$$

d'où le résultat.

2. Équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants

2. 1. Description

Une équation différentielle du second ordre linéaire est une équation du type

$$(E) \qquad a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=d(t)$$

La fonction d est le second membre, et l'équation (H) : $a(t)y"+b(t)Y'+c(t)y=0$ est son équation sans second membre (ou homogène) associée.
Comme pour les équations du premier ordre, on obtient la solution générale de (E) en additionnant à la solution générale de (H) une solution particulière de (E).
Dans ce cours les fonctions a, b, c sont constantes, c'est-à-dire l'équation différentielle (E) est à coefficients constants.

2. 2. Forme des solutions de l'équation sans second membre

Il s'agit de résoudre une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants, sans second membre (ou homogène), du type (H) $ay" + by' + cy = 0$, a, b, c étant des réels et a étant non nul (pour que (H) soit bien du second ordre. On a le résultats :

Proposition 5. Si f_1 et f_2 sont deux solutions non proportionnelles de l'équation (H) $ay" + by' + cy = 0$, alors la solution générale de (H) est $y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f2$.

2. 3. Résolution de l'équation sans second membre

Nous allons nous attacher à trouver deux solutions indépendantes (i.e. non proportion- nelles) de l'équation (H) $ay" + by' + cy = 0$.

Il est bien connu que dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre linéaire homogène à coefficients a et b constants $ay' + by = 0 \iff y' = \alpha y$ avec $\alpha = -\frac{b}{a}$, la solution générale est $y = e^{\alpha t}$.

L'idée est donc d'essayer ici aussi de trouver des solutions sous forme exponentielle : $f(t) = e^{rt}$.

Déterminons à quelle condition une fonction exponentielle $f(t) = e^{rt}$ est solution de cette équation (H).

On a $f'(t) = re^{rt}$ et $f''(t) = r^2 e^{rt}$ donc $af"(t) + bf'(t) + cf(t) = (ar^2 + br + c)e^{rt}$.

Donc la fonction exponentielle $f(t) = e^{rt}$ est solution de (H) si et seulement si r est une racine de l'équation (C) $ar^2 + br + c$ appelée équation caractéristique de l'équation (H).

On s'est ramené à la résolution d'une équation numérique du second degré, ce qui est plus facile. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (C).

- ⋆ Si $\Delta > 0$, c'est le plus facile : puisque (C) admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, il y a deux fonction exponentielles $f(t) = e^{r_1 t}$ et $f_2(t) = e^{r_2 t}$ qui sont solutions de (H). Comme ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles ($\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = e^{(r_1 - r_2)t}$ n'est pas constante), on est sûr que la solution générale de (H) est
$$y = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$
- ⋆ Si $\Delta < 0$, c'est un peu plus compliqué : l'équation (C) n'a pas de solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha - i\omega = \bar{r}_1$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Formellement, les fonctions exponentielles complexes $f(t) = e^{r_1 t}$ et $f_2(t) = e^{r_2 t}$ sont des solutions, mais ce ne sont pas des fonctions réelles : ce n'est pas facile à manier. L'astuce vient en fait du calcul de $f_1 + f_2$ et $f_1 - f_2$ et des formules d'Euler.
$f_1 + f_2$ est une solution de (H). Or, $f_1(t) + f_2(t) = e^{(\alpha + i\omega)t} + e^{(\alpha - i\omega)t} = e^{\alpha t}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Or, les formules d'Euler nous disent que
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
On a donc $g_1(t) = \frac{f_1(t)+f_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ et de même $g_1(t) = \frac{f_1(t)-f_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ qui sont des solutions réelles de (H) (non proportionnelles puisque leur quotient vaut $\tan(\omega t)$).
La solution générale de (H) est donc $y = \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t)$ soit
$$y = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\omega_1 t) + \lambda_2 \sin(\omega t))$$
- ⋆ Le cas le plus délicat est le cas $\Delta = 0$:
Dans ce cas (C) admet une unique solution (qui est réelle) $r = \frac{-b}{2a}$. On dispose donc d'une seule solution de (H) exponentielle qui est $g(t) = e^{rt}$.
On peut alors chercher la solution générale de (H) en appliquant une méthode de variation de la constante : pour une fonction quelconque $y = f(t)$, on l'écrit sous la forme $y = \lambda(t)g(t)$ (il suffit de poser $\lambda(t) = f(t)e^{-rt}$).
On a alors $y'(t) = \lambda'(t)g(t) + \lambda(t)g'(t)$ et $y''(t) = \lambda''(t)g(t) + 2\lambda'(t)g'(t) + \lambda(t)g''(t)$.
Dire que y est solution de (H) se traduit donc par l'équation équivalente
$$\begin{aligned}(H) &\iff a(\lambda''(t)g(t) + 2\lambda'(t)g'(t) + \lambda(t)g''(t)) + b(\lambda'(t)g(t) + \lambda(t)g'(t)) + c\lambda(t)g(t) = 0 \\ &\iff \lambda(t)\underbrace{(ag''(t) + bg'(t) + cg(t))}_{=0 \text{ car } g \text{ solution de } (H)} + \lambda'(t)(2ag'(t) + bg(t)) + a\lambda''(t)g(t) = 0\end{aligned}$$
Intéressons-nous au coefficient de $\lambda'(t)$.
On a $2ag'(t) + bg(t) = 2are^{rt} + be^{rt} = e^{rt}(2ar + b) = 0$ puisque $r = -\frac{b}{2a}$.

Donc y est solution de (H) si et seulement si $\lambda''(t) = 0$, ce qui équivaut à $\lambda'(t) = \beta$ (constante) et $\lambda(t) = \beta t + \gamma$ (fonction affine). La solution générale de (H) est donc, dans ce cas $y = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rx}$. On a obtenu dans ce cas les deux solutions particulières de (H) non proportionnelles que sont $g(t) = e^{rt}$ et $g_1(t) = te^{rt}$, et la solution générale de (H)

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt}.$$

Théorème 6. Soit (H) $ay" + by' + c = 0$ une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants sans second membre et soit (C) $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ⋆ Si $\Delta > 0$, les racines de (C) étant r_1 et r_2, alors la solution générale de (H) est :

$$y = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

- ⋆ Si $\Delta < 0$, une racine complexe de (C) étant $\alpha + i\omega$, alors la solution générale de (H) est :

$$y = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t))$$

- ⋆ Si $\Delta = 0$, la racine double de (C) étant r, alors la solution générale de (H) est :

$$y = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rx}$$

Exemple 7. (H) $y" - 3y' + 2y = 0$.
L'équation caractéristique est (C) : $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les racines (évidentes) sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ donc la solution générale de (H) est $y = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t}$.

Exemple 8. (H) $y" - 2y' + 5y = 0$.
L'équation caractéristique est (C) : $r^2 - 2r + 5 = 0$ de discriminant $\Delta = -16$ une racine de (C) est $r_1 = \frac{2+i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$ donc la solution générale de (H) est $y = (\lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t))e^t$.

Exemple 9. (H) $4y" - 12y' + 9y = 0$.
L'équation caractéristique est (C) : $4r^2 - 12r + 9 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$ dont la racine double est $r = \frac{3}{2}$. donc la solution générale de (H) est $y = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{\frac{3}{2}t}$.

2. 4. Résolution de l'équation complète

Théorème 7. Soit (E) $ay" + by' + cy = d(t)$ une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants (avec un second membre).
Soit (H) $ay" + by' + cy = 0$ son équation homogène associée.
La solution générale de (E) s'obtient en additionnant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

2.41 Résolution à l'aide d'une solution particulière

Proposition 8. Soit (E) l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants (E) : $ay" + by' + cy = d(t)$. Soit (H) : $ay" + by' + cy = 0$ son équation sans second membre associée, et soit (C) : $ar^2 + br + c = 0$ son équation caractéristique.

- ⋆ Si $d(t)$ est un polynôme de degré p, alors (E) admet une solution particulière
  - — de même degré p si 0 n'est pas racine de (C),
  - — de degré $p + 1$ si 0 est racine simple de (C),
  - — de degré $p + 2$ si 0 est racine double de (C).
- ⋆ Si $d(t)$ est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ ($P(t)$ étant un polynôme de degré p), alors (E) admet une solution particulière de la forme $Q(t)e^{\lambda t}$, $Q(t)$ étant un polynôme
  - — de même degré p si λ n'est pas racine de (C),
  - — de degré $p + 1$ si λ est racine simple de (C),
  - — de degré $p + 2$ si λ est racine double de (C).
- ⋆ Si $d(t)$ est de la forme $\lambda \cos(\mu t) + i\beta \sin(\mu t)$, alors (E) admet une solution particulière de la forme $A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)$, sauf si $i\mu$ est racine de (C), dans ce cas, une solution particulière est de la forme $t(A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t))$

Exemple 10. Soit (E) $y" + 3y' - 4y = 8t + 5$.
Cherchons une polynome $P(t) = at + b$ solution de (E).
Pour $P(t) = at + b$, on a $P'(t) = a$ et $P"(t) = 0$ On obtient

$$\begin{aligned} P'' + 3P' - 4P = 8t - 4 &\iff a \times 0 + 3a - 4(at + b) = 8t + 5 \\ &\iff -4at + (3a - 4b) = 8t + 5 \\ &\iff \begin{cases} -4a = 8 \\ 3a - 4b = 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{-11}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique (C) $r^2 + 3r - 4 = 0$ de l'équation sans second membre associée (H) $y" + 3y' - 4y = 0$ admet 1 et -4 comme racines. Les solutions de (E) sont donc les fonctions du type $y = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-4t} - 2t - \frac{11}{4}$.

Exemple 11. Soit(E) $y" + 4y' + 5y = \sin t$.
On cherchera une solution particulière sous la forme $a\cos t + b\sin t$.
On pose $f(t) = a\cos t + b\sin t$.
On a alors $f'(t) = -a\sin t + b\cos t$ et $f"(t) = -a\cos t - b\sin t$. f est solution de (E) lorsque

$$\begin{aligned} f'' + 4f' + 5f = \sin t &\iff a \times -a\cos t - b\sin t + 4(-a\sin t + b\cos t) + 5(a\cos t + b\sin t) = \sin t \\ &\iff (-a + 4b + 5a)\cos t + (-b - 4a + 5b)\sin t = \sin t \\ &\iff \begin{cases} 4a + 4b = 0 \\ -4a + 4b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation (E) est donc $f(t) = -\frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$.
L'équation homogène associée admet (C) $r^2 + 4r + 5 = 0$ comme équation caractéristique, de discriminant $\Delta = -4$, dont une racine est $-2 + i$, donc la solution générale de l'équation homogène est $y = e^{-2t}(\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t)$ et la solution générale de (E) est

$$y = e^{-2t}(\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t) - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t$$

Exemple 12. Soit (E) $y" + 2y' + y = e^t$.
Puisque la fonction exponentielle est égale à toutes ses dérivées on peut «voir» que $f(t) = \frac{e^t}{4}$ est une solution particulière. Comme l'équation homogène associée (H) $y" + 2y' + y = 0$ a comme équation caractéristique (C) $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui admet -1 comme racine double, on peut dire que la solution générale de (E) est $y = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \frac{e^t}{4}$

2. 5. Condtions initiales :

Théorème 9.
Soit $t_0, t_1 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) définie sur un intervalle$I$ possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales du type

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_1) = y_1$$

.

Exemple 13. La solution de (E) $\qquad y'' + y' = \frac{1}{\sin(t)}$ qui vérifier $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$est

$$y = (-t + \frac{\pi}{2})\cos t + \ln(\sin t)\sin t$$

en effet on a trouver que la solution générale de (E) est

$$y = (-t + c_1)\cos t + (\ln(\sin t) + c_2)\sin t$$

donc

$$y' = -\cos(t) - (-t + c_1)\sin t + (\ln(\sin t) + c_2)\cos t + \cos(t) = -(-t + c_1)\sin t + (\ln(\sin t) + c_2)\cos t$$

alors :
$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \iff c_2 = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \iff c_1 = \frac{\pi}{2}$,
d'où le résultat.