TD5 :Equations différentielles linéaires

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle $(E): \quad y' + y = 2e^{-t}$ où y est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $(H): \quad y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(t) = 2te^{-t}$ est une solution de (E).
3. Déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition : $y(0) = 3$

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y' - 4y = 4t^3 - 15t^2 + 2t - 3$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme solution de cette équation.
2. Préciser quelle est l'équation sans second membre associée. La résoudre.
3. En déduire les solutions de l'équation.
4. Trouver la solution y de l'équation telle que $y(0) = -2$.

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle linéaire :

$$y' - \frac{3}{t}y = t$$

à étudier sur $]0, +\infty[$.

1. Donner l'équation homogène associé et la résoudre.
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver les solutions de cette équation.
3. Trouver la solution y de l'équation telle que $y(1) = 3$.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes, sur l'intervalle I qui est précisé à chaque fois :

1. $y' - (\frac{2}{t^2})y = 0, \quad I =]0, +\infty[$.
2. $y' = \frac{y-2}{t-1}, \quad I =]1, +\infty[$.
3. $t(1+t^2)y' - (t^2-1)y + 2t = 0, \quad I =]0, +\infty[$.
4. $y' - \frac{y}{t^2-1} = 1, \quad I =]-1, 1[$
5. $(t-1)y' + y = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad I =]-1, 1[$
6. $(\cos t)y' - (\sin t)y = \cos(2t), \quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 5 : On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) :

$$(E) \qquad y' + 2ty = 2ty^3.$$

Soit $t \mapsto y(t)$ une solution. On considère la fonction z définie par $z(t) = \frac{1}{y(t)^2}$

1. Montrer que : $z'(t) = \frac{-2y(t)}{y(t)^3}$.
2. Former une équation différentielle (E') vérifiée par z.
3. Résoudre (E') puis (E).

Exercice 6 : Pour chacune des équations différentielles du second ordre suivantes : Donner la solution générale et trouver la solution particulière qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

1. $y'' + 3y' + 2y = 0.$.
2. $y'' + 2y' + y = 0.$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

4. $y'' - 6y' + 13y = 0$.
5. $y'' - y' + y = 0$.
6. $12y'' - 60y' + 75y = 0$.
7. $20y'' + 9y' + y = 0$.
8. $3y'' - 5y' - 2y = 0$.
9. $y'' - 8y' + 17y = 0$.

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-3t}$.
2. $y'' + y = t^2 - 1$.
3. $y'' - 4y = 13\cos(3t)$.
4. $y'' + 2y' + y = t + 4$
5. $2y" + y' - y = 3\cos(2t) - \sin(2t)$.

Exercice 8 : On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y'' - y' + 5y = -4e^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) : $\quad y'' - 6y' + 5y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x) = xe^x$ est une solution de (E).
3. Déduire la solution générale de l'équation (E).

Exercice 9 : On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) : $\quad y'' + 4y' + 3y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie par : $g(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
3. Déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = -1$$