Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale et de
la Formation Professionnelle

Centre National de l'Évaluation, des Examens
et de l'Orientation

EXAMEN NATIONAL
DU BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION DE MAI 2015

B
T
S

Filières : - Systèmes Electroniques
- Electrotechnique

Épreuve : MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 15

Consignes :

- Le sujet comporte 2 pages.
- Aucun document n'est autorisé.
- Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.

Examen National du Brevet de Technicien Supérieur
Session de Mai 2015
- Sujet -

Filières:	**Systèmes Electroniques - Electrotechnique**	**Durée**	**2 Heures**
Épreuve de:	**MATHEMATIQUES**	**Coefficient**	**15**

Exercice 01 : (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-y'-6y=-5e^{-2x}$; où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur IR .

1 pt — 1/ Résoudre l'équation homogène (H) : $y''-y'-6y=0$.

0.5 pt — 2/ Vérifier que la fonction g définie sur IR par : $g(x)=xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

0.5 pt — 3/ Déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

0.5 pt — 4/ Déterminer la fonction y solution de (E) sur IR vérifiant les conditions :

$$y(0)=1 \text{ et } y'(0)=-1$$

5/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x+1)e^{-2x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

0.75 pt — a/ Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0 .

0.75 pt — b/En déduire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de (C_f) par rapport à (T) au voisinage de ce point.

Exercice 02 : (4 points)

Soit $x(n)$ le signal causal discret vérifiant pour tout $n\in IN$:

$$x(n)-2x(n-1)=r(n)$$

Où r est la rampe causale discrète définie par : $r(n)=n$ pour tout $n\in IN$.

On rappelle que la transformée en Z de r est : $(Z_r)(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

1 pt — 1/ Calculer $x(0)$; $x(1)$ et $x(2)$.

1 pt — 2/ Démontrer que la transformée en Z de x est : $(Z_x)(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)(z-1)^2}$

1 pt — 3/ Vérifier que : $(Z_x)(z)=\dfrac{2z}{z-2}-\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{(z-1)^2}$

1 pt — 4/ Exprimer $x(n)$ en fonction de n pour tout $n\in IN$.

Exercice 03 : (4 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Soit Δ le domaine délimité par les côtés du triangle de sommets :

$$O(0\,;0)\ ,\ A(1\,;0) \text{ et } B(0\,;1).$$

1 pt a/ Vérifier que l'équation cartésienne de la droite (AB) est : $y=1-x$.

1 pt b/ Calculer l'intégrale double : $\iint_{\Delta} x^2\, y\, dx\, dy$.

2/ On considère le domaine D défini par :

$$D=\left\{(x,y)\in IR^2 /\ \ y\geq 0\ ;\ x\geq 0\ et\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$$

1 pt a/ Représenter, dans le plan P, le domaine D.

1 pt b/ En utilisant les coordonnées polaires, Calculer l'intégrale : $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$.

Exercice 04 : (5 points)

On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $P=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

0.5 pt 1/a/ Calculer $P_A(x)$ le polynôme caractéristique de la matrice A .

0.5 pt b/ Vérifier que les valeurs propres de la matrice A sont : 2 et 3.

0.75 pt 2/a/ Montrer que la matrice P est inversible et que : $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

0.5 pt b/ Vérifier que $P^{-1}.A.P=D$.

0.75 pt c/ Calculer A^n pour tout $n\in IN$.

3/ On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0=1\ ;\ v_0=1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n\in IN\ :\ \begin{cases}u_{n+1}= & u_n - 2v_n\\ v_{n+1}= & u_n + 4v_n\end{cases}$$

0.5 pt a/ Vérifier que : $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$ pour tout $n\in IN$.

0.5 pt b/ En déduire que : $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$ pour tout $n\in IN$.

1 pt c/ Exprimer u_n et v_n en fonction de n pour tout $n\in IN$.

Exercice 05 : (3 points)

Une usine a fabriqué 25 pièces identiques, dont 5 pièces présentent un défaut.

On prélève simultanément 2 pièces au hasard parmi les 25 pièces fabriquées.

0.5 pt 1/ Quelle est la probabilité d'obtenir 2 pièces sans défaut ?

2/ Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage des 2 pièces, associe le nombre de pièces présentant un défaut.

1 pt a/ Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

0.75 pt b/ Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

0.75 pt c/ Calculer la variance de la variable aléatoire X .

Fin de l'épreuve